

Prévision numérique de la convection forcée turbulente dans une cavité bidimensionnelle entraînée

P. ABADIE and R. SCHIESTEL

Institut de Mécanique Statistique de la Turbulence, L.A. CNRS n° 130, 12 avenue Général Leclerc, 13003 Marseille, France

(Reçu le 27 Mars 1985 et sous forme révisée le 12 Juillet 1985)

Résumé—On étudie l'écoulement turbulent et la convection thermique en milieu confiné à l'aide d'une méthode numérique aux différences finies en variables primitives. La modélisation de la turbulence est basée sur des fermetures en un point dérivées du schéma classique $k-\epsilon$. Les champs calculés de vitesse moyenne et d'énergie cinétique de la turbulence sont comparés aux données expérimentales disponibles. Malgré ses insuffisances, le modèle $k-\epsilon$ s'avère utile à la prévision des grandeurs moyennes globales. Le cas de la convection forcée avec températures de paroi imposées est considéré. On étudie le champ de température moyen ainsi que les propriétés thermiques globales de la cavité. Des corrélations donnant les nombres de Nusselt relatifs à chacune des faces de la cavité en fonction du nombre de Reynolds sont déduites du calcul, elles résument ainsi les propriétés de transfert d'une telle configuration d'écoulement.

1. INTRODUCTION

LES ÉCOULEMENTS en cavité sont rencontrés dans de nombreux dispositifs industriels tels que les réacteurs nucléaires, les turbomachines, les capteurs solaires, ainsi qu'en hydrodynamique navale (ballast de sous-marins), en aérodynamique et dans les problèmes d'environnement (dispersion des polluants dans un estuaire).

Le présent travail a pour origine le problème du refroidissement des rotors de turbomachines. Il s'agit d'une étude préliminaire concernant l'interaction d'un écoulement chaud avec une cavité ouverte à température ambiante en régime de convection forcée. Afin de mettre au point la méthode numérique et de tester les hypothèses de modélisation de la turbulence nous nous sommes placés dans une configuration géométrique simple qui schématise le problème technologique : une cavité bidimensionnelle rectangulaire entraînée par une paroi mobile à vitesse uniforme.

La détermination numérique des propriétés de transfert thermique d'un tel dispositif nécessite la connaissance préalable de la dynamique de l'écoulement. Malgré la simplicité apparente de la géométrie considérée, l'écoulement turbulent qui s'y développe est de type complexe [1] (effet des parois, complexité des structures tourbillonnaires, recirculations, possibilité d'évolutions tridimensionnelles).

L'écoulement et la convection thermique en cavité ont été l'objet de plusieurs études expérimentales [2-13]. Des configurations diverses ont été considérées, correspondant à des écoulements différents (le cas $E = 1$ étant le plus usuel), des modes d'entraînement différents (cavité ouverte infinie, cavité ouverte dans un conduit, cavité fermée avec entraînement par paroi mobile) et des fluides différents, aussi bien en régime laminaire que turbulent ou de transition. Les

régimes de convection naturelle et mixte ont également été considérés par quelques auteurs [14]. Parmi ces diverses études plusieurs font état de mesures de température et de coefficients de transfert thermique sur les parois de la cavité. Signalons par ailleurs les travaux de visualisation effectués par Weighardt [15] utiles à la compréhension des structures tourbillonnaires. Malheureusement, les difficultés d'investigation expérimentales dans les écoulements confinés font que les mesures de grandeurs moyennes et de grandeurs turbulentes données dans la littérature restent souvent partielles. De plus, les données expérimentales ne fournissent parfois que des quantités globales telles que coefficients de pression, coefficients de frottement pariétal ou de transfert thermique. De ce fait il ne sera pas toujours possible d'effectuer des comparaisons fines entre données expérimentales issues des mesures en situation réelle et les prévisions numériques basées sur un modèle de turbulence classique.

Diverses études à caractère analytique ou numérique ont été publiées [16-33]. La géométrie simple d'une cavité carrée ou rectangulaire a largement été utilisée pour tester et développer des méthodes numériques de résolution des équations de Navier-Stokes en régime laminaire. Par contre, en régime turbulent, l'approche statistique se heurte rapidement au problème de la modélisation de la turbulence dans une configuration qui engendre des complexités dans les structures et les interactions tourbillonnaires. L'objectif, dans ce cas, sera d'une part de tester des modélisations de la turbulence et d'autre part de mettre au point des méthodes prévisionnelles utiles à l'industriel.

Les travaux tant expérimentaux que numériques mettent en évidence d'une part la présence de gros tourbillons principaux plus ou moins stables suivant les

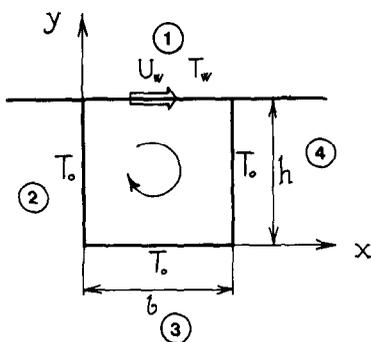


FIG. 1. Description schématique de la configuration de l'écoulement.

caractéristiques analogues si les résultats sont présentés moyennant une normalisation convenable. La vitesse de référence U_r doit alors être choisie comme suit : dans le cas d'une cavité ouverte avec entraînement par l'écoulement libre $U_r = U_\infty$ (vitesse de l'écoulement extérieur), dans le cas d'une cavité dans une conduite, $U_r = U_0$ (vitesse débitante), dans le cas d'une cavité fermée par une paroi mobile $U_r = U_w/n$ avec $n > 1$ (valeur constante pouvant différer d'une expérience à l'autre), Girard et Curtet [12], ainsi que Ideriah [23] donnent $n = 2, 4$.

Les équations du problème ont été rendues adimensionnelles après normalisation des différentes quantités par rapport aux échelles b pour les longueurs, U_w pour les vitesses et $\theta = T_w - T_0$ pour les températures. La masse volumique ρ est supposée constante.

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (\text{conservation de la masse}) \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial x} \overline{u^2} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{uv} + \frac{1}{Re} \Delta U - \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{dV}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial x} \overline{uv} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{v^2} + \frac{1}{Re} \Delta V - \frac{\partial P}{\partial y} \end{aligned} \right\} \text{(équations du mouvement)} \quad (2), (3)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x} \overline{u\theta'} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{v\theta'} + \frac{1}{Re Pr} \Delta \theta \quad (\text{équation de la chaleur}) \quad (4)$$

où
$$\frac{d}{dt} \equiv U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y}$$

2.2. Modélisation de la turbulence

Le modèle classique $k-\epsilon$ de Jones et Launder [34, 35] a été utilisé dans sa version applicable aux écoulements turbulents pleinement développés.

Ce schéma de turbulence reste basé sur une hypothèse de viscosité de la turbulence et de diffusivité thermique de la turbulence définis par :

$$\overline{u_i u_j} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (5)$$

$$\overline{u_i \theta'} = -\sigma_\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \quad (6)$$

avec

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}, \quad \sigma_\theta = \frac{\nu_t}{Pr_\theta}$$

Le champ turbulent est décrit par les deux quantités k et ϵ définies par leur équation d'évolution :

$$\frac{dk}{dt} = \mathcal{P} - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{Pr_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \quad (7)$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon \mathcal{P}}{k} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{Pr_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) \quad (8)$$

avec

$$\mathcal{P} = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

et

$$C_\mu = 0,09 \quad C_{\epsilon 1} = 1,45 \quad C_{\epsilon 2} = 1,95 \\ Pr_\theta = 1,0 \quad Pr_k = 1,0 \quad Pr_\epsilon = 1,3.$$

Les conditions aux limites sur les parois ont été formulées en plaçant le premier point de discrétisation dans la zone pleinement turbulente et en effectuant un raccordement à la loi logarithmique de vitesse et de température supposées valables près de la paroi dans une mince région d'écoulement monodimensionnel :

$$\frac{U - U_p}{u_*} = \frac{1}{K} \log Ey_* \quad (9)$$

$K = 0.41$ (constante de Karman); $E = 9.0$

$$\frac{T - T_p}{T_*} = Pr_\theta \left(\frac{U - U_p}{u_*} + \mathbb{P} \right) \quad (10)$$

Si l'on désigne par τ_p et \mathcal{F}_p le frottement à la paroi et la densité de flux thermique à la paroi :

$$T_x = \frac{\mathcal{F}_p}{\rho \mathcal{C}_p u_*} \quad u_* = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} \quad (11)$$

\mathbb{P} est une fonction empirique des nombres de Prandtl du fluide et de la turbulence [39, 40] définie par :

$$\mathbb{P} = 9 \left(\frac{Pr}{Pr_\theta} - 1 \right) \left(\frac{Pr}{Pr_\theta} \right)^{-1/4} \quad (12)$$

Ainsi dans le noyau turbulent de l'écoulement, un modèle applicable à une turbulence avec fort nombre de Reynolds, sera suffisant et les termes de diffusion moléculaire pourront être négligés dans (2)-(4).

2.3. Méthode numérique

Dans le cadre du modèle $k-\epsilon$, les équations du mouvement moyen et du champ turbulent ainsi que de la température se mettent toutes sous la forme générale :

$$\mathcal{E}(\phi) \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left[U \phi - \frac{\nu_t}{Pr_\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[V \phi - \frac{\nu_t}{Pr_\phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] - S_\phi = 0$$

où ϕ est une fonction générique représentant, U , V , k , ε ou θ et S_ϕ le terme source spécifique à l'équation de ϕ .

La discrétisation de ces équations a été effectuée en variables primitives à l'aide de la méthode des volumes finis [39–41]. L'équation $\mathcal{E}(\phi) = 0$ est alors approchée par

$$\iint_v \mathcal{E}(\phi) dx dy = 0 \quad (13)$$

où v représente un volume parallélépipédique de section $dx \times dy$ et de profondeur unité. Les composantes de vitesse U et V sont discrétisées sur des maillages décalés par rapport aux noeuds principaux sur lesquels sont discrétisées les autres quantités p , k , ε , θ . Les termes de convection–diffusion sont approchés à l'aide d'un schéma de type hybride [41] qui permet de réduire l'effet de la fausse diffusion d'origine numérique. Des calculs comparatifs avec d'autres schémas de discrétisation ont également été effectués [38] (schéma amont, schéma puissance).

Le système des équations discrétisées est résolu itérativement par des balayages ligne par ligne utilisant l'algorithme tridiagonal. Une des particularités de la méthode de Pun et Spalding [39] est de résoudre sur une même ligne, l'ensemble de toutes les équations du système avant de faire progresser le balayage. L'algorithme SIMPLE [41] est utilisé pour résoudre le champ de pression et imposer la continuité du champ des vitesses. Partant de valeurs arbitraires, le champ de pression et le champ de vitesse sont corrigés point par point de manière à rétablir la conservation de la masse sur chaque cellule de discrétisation. Cette correction de pression est solution d'une équation de Poisson qui peut être résolue elle-même itérativement à l'aide des méthodes utilisées pour les autres équations du système.

Du fait du couplage et de la non-linéarité des équations, la stabilité du processus n'est assurée que par l'emploi de coefficients de sous-relaxation et par une linéarisation convenable des termes source. La convergence de la méthode est contrôlée par l'examen de l'évolution des résidus relatifs à chacune des équations et du défaut de masse intervenant comme terme source des équations de correction de pression ainsi que l'examen de l'évolution des fonctions calculées en des noeuds de maillage présélectionnés.

Dans tous les cas, les conditions aux limites du calcul sont obtenues par raccordement aux lois logarithmiques (9) et (10). Pun et Spalding [39] proposent une définition modifiée des vitesses et températures de frottement dans (9):

$$\begin{aligned} u_* &= \frac{\tau_p}{\rho C_\mu^{1/4} k^{1/2}} \\ T_* &= \frac{\mathcal{F}_p}{\rho \mathcal{C}_p C_\mu^{1/4} k^{1/2}} \\ y_x &= \frac{C_\mu^{1/4} k^{1/2}}{v} y. \end{aligned} \quad (14)$$

Cette variante permet de tenir compte de façon simplifiée des situations de non équilibre.

La condition imposée sur k près d'une paroi correspond à un flux nul. Les termes source dans l'équation de k discrétisée sur une cellule adjacente à la paroi sont alors modifiés et exprimés directement en fonction de τ_p , de plus, un traitement particulier est nécessaire sur chacun des angles de la cavité (voir Annexe).

2.4. Tests numériques

La méthode numérique a d'abord été testée dans le cas d'un écoulement laminaire [38]. Pour $Re = 100$, $E = 1$ et $\delta x = \delta y = 0.1b$ les résultats du calcul sont très voisins de ceux obtenus par Bontoux [24] qui utilise un schéma précis à l'ordre deux ainsi que de ceux obtenus par Nallasamy et Prasad [27] qui utilisent une méthode du premier ordre dérivée des schémas Adi et Sor.

Les schémas de convection–diffusion de type amont, hybride et puissance [41] ont été mis en oeuvre pour différentes valeurs de la dimension des cellules qui correspond à un pas d'espace uniforme $\delta x = \delta y$. Il s'avère que la solution numérique est pratiquement indépendante du pas d'espace pour une valeur de ce dernier de l'ordre de $b/32$.

En régime turbulent, les nombres de Reynolds $Re = 5 \times 10^4$ à 4×10^5 ont été principalement étudiés. Les tests sur l'influence du maillage ont donné les résultats suivants: dans le cas du schéma hybride, un maillage de 32×32 points s'avère nécessaire pour obtenir une solution indépendante du maillage, par contre dans le cas du schéma amont, un maillage plus fin est nécessaire. Le schéma puissance, plus coûteux, donne des résultats analogues à ceux du schéma hybride. Ce dernier a donc été retenu dans les exploitations ultérieures sur un maillage de 32×32 points.

Dans le cas d'un régime turbulent, plus de 500 itérations sont généralement nécessaires pour obtenir la solution convergée. Le temps d'exécution sur ordinateur IBM 3081 est alors d'environ 100 s soit 0,2 s environ par itération (dans le cas du modèle $k-\varepsilon$).

3. RÉSULTATS ET DISCUSSION

3.1. Champ dynamique moyen

3.1.1. *Cavité carrée bidimensionnelle.* Les Figs. 2 et 3 présentent les distributions calculées des composantes de vitesse moyenne le long des sections médianes de la cavité comparées aux mesures de différents auteurs [3, 5, 12, 14] ainsi qu'aux résultats numériques de Ideriah [23].

On constate un assez bon accord général entre les distributions des vitesses $U(y)$ calculées et les expériences de Mills [3, 5] à $Re = 2 \times 10^5$ et Grand [14] (Fig. 2), une légère surestimation des valeurs absolues de vitesse apparaît au bas de la cavité. De plus on ne décèle pas de différence sensible entre les courbes obtenues aux deux nombres de Reynolds considérés.

Par contre, les vitesses $V(x)$ obtenues par le calcul

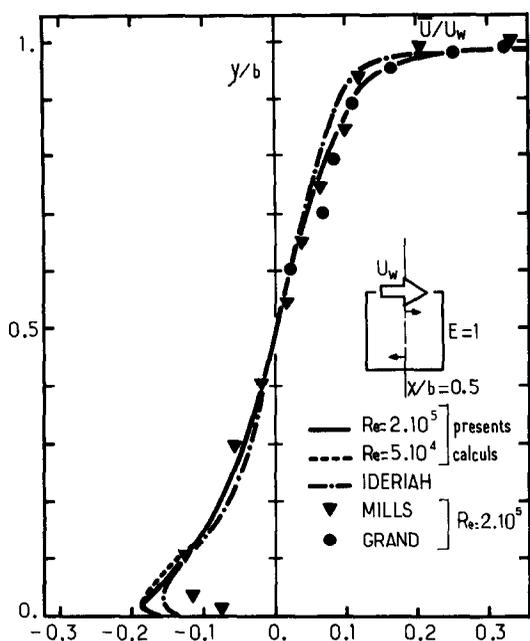


FIG. 2. Distribution des vitesses moyennes $U(y)$ sur une section médiane de la cavité.

dans le noyau de l'écoulement (Fig. 3) sont nettement inférieures en grandeur à celles fournies par les expériences de Grand [14] et Girard et Curtet [12]. Cet écart, également trouvé par Ideriah [23], peut correspondre à une insuffisance du modèle $k-\epsilon$, mais les incertitudes expérimentales au centre de la cavité sont importantes. En effet, dans cette région, les vitesses instantanées sont faibles et peuvent changer de signe fréquemment car les fluctuations sont du même ordre

de grandeur que les valeurs moyennes, et les mesures au laser par Girard et Curtet peuvent être perturbées dans de telles circonstances [12]. Le niveau de vitesse obtenu près des parois reste cependant correct.

Les profils de $U(y)$ et $V(x)$ sont quasi-linéaires dans la région centrale de la cavité. On constate d'ailleurs l'existence de toute une zone centrale dans laquelle le rotationnel des vitesses est presque constant. Ce fait montre que le tourbillon central tourne en bloc. On est alors conduit à une représentation simplifiée [16] de la structure de l'écoulement qui distingue une zone centrale constituée par un tourbillon tournant en bloc et une zone périphérique à fort gradient de vitesse et assimilable à un écoulement de type couche-limite. Le point de vitesse nulle est pratiquement situé au centre de la cavité. Ce fait apparaît aussi sur le tracé des lignes de courant données sur la Fig. 7. Certains auteurs [12] caractérisent le mouvement tourbillonnaire par l'intensité Ω définie par

$$\Omega = \frac{\mathcal{D}}{\rho U_w b} \tag{15}$$

où \mathcal{D} est le débit aller et retour dans une section médiane de la cavité.

Si l'on se place dans une section médiane passant par le centre du tourbillon, \mathcal{D} se trouve être égal à ψ_{max} , valeur maximale de la fonction de courant. Les valeurs de Ω fournies par le calcul, soit $\Omega = 0,0360$ (à $Re = 2 \times 10^5$) et $\Omega = 0,0414$ (à $Re = 5 \times 10^4$), sont un peu plus faibles que celles obtenues expérimentalement par Girard et Curtet [12] (respectivement $\Omega = 0,0466$ à $Re = 2 \times 10^5$ et $\Omega = 0,0487$ à $Re = 5 \times 10^4$) mais varient dans le même sens en fonction du nombre de Reynolds. Grand [14] donne une valeur indépendante du nombre de Reynolds correspondant à $\Omega = 0,0442 \pm 0,0012$.

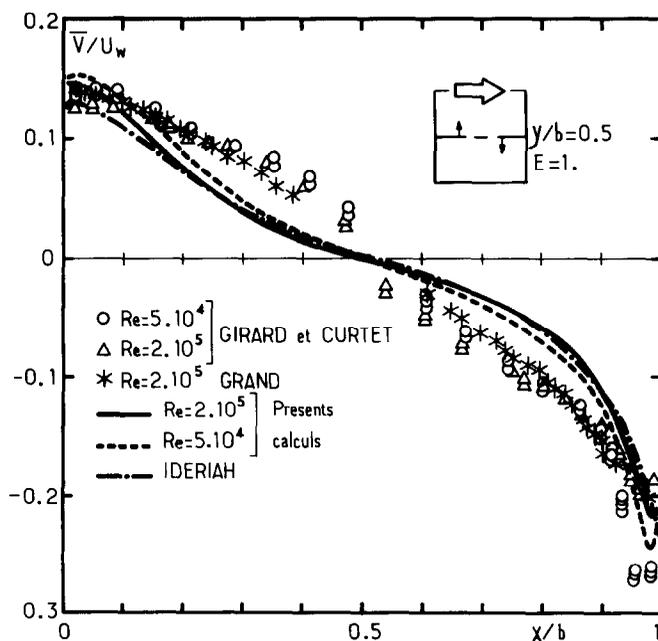


FIG. 3. Distribution des vitesses moyennes $V(x)$ sur une section médiane de la cavité.

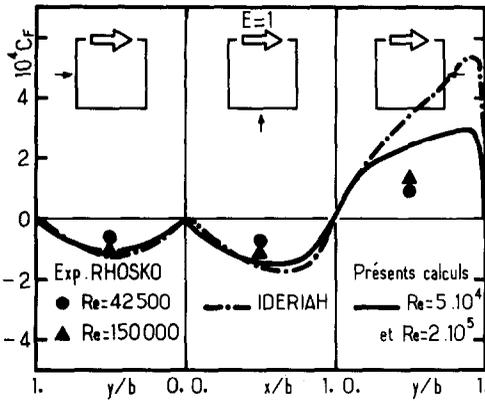


FIG. 4. Répartition des coefficients de frottement.

Le coefficient de frottement $C_F = \tau_p / \frac{1}{2} \rho U_w^2$ a été porté sur la Fig. 4 et les quelques points expérimentaux connus [2] portés à titre de comparaison (quoique pour des nombres de Reynolds différents). C_F s'annule en chaque coin de la cavité. Le frottement maximal se produit dans une région très proche de l'angle supérieur droit de la cavité ($x = b, y = b$). On a vérifié aussi, comme Roshko [2] l'a constaté expérimentalement que les forces de frottement sont d'un ordre de grandeur négligeable devant les forces de pression. Les valeurs de C_p obtenues par le calcul peuvent dépasser $50C_F$.

3.1.2. *Cavité rectangulaire.* Quelques cas d'écoulement dans une cavité d'élanement différent de l'unité ont été traités: $E = 1.5$ et $E = 3$. L'augmentation de l'élanement provoque un aplatissement du profil des vitesses moyennes et par conséquent une

diminution de Ω c'est à dire des courants aller-retour. A titre indicatif on trouve $\Omega = 0,0177$ pour $y/b = 2$ et $\Omega = 0,0158$ pour $y/b = 1$ dans le cas d'un élanement égal à 3. Quoique les valeurs calculées et mesurées ne soient pas exactement identiques, l'influence de E est correctement prise en compte par le calcul (Fig. 5).

3.2. *Champ turbulent*

Sur la Fig. 6 sont portés les profils d'intensité de turbulence $\sqrt{u^2}/U_w$ dans la section $x = 0.5b$ et $\sqrt{v^2}/U_w$ dans la section $y = 0.5b$ données par l'expérience. Ces quantités sont comparées aux profils de $\sqrt{\frac{2}{3}k}/U_w$ fournis par le modèle $k-\epsilon$. On constate que l'énergie turbulente est plus forte près des parois, zone fortement cisailées et le maximum énergétique se trouve situé dans le courant aller du fluide directement issu de la portion entraînée. On trouve une correspondance générale assez bonne, toutefois des écarts demeurent près des parois, zone fortement anisotrope dans laquelle on ne peut simplement assimiler les tensions normales à leur partie sphérique. Des écarts existent aussi au centre de la cavité où le modèle ne fournit pas l'accroissement marqué par les points expérimentaux.

Cette description est également illustrée par la Fig. 7 qui donne les courbes de niveau de l'énergie cinétique turbulente.

Une tentative d'explication des écarts constatés sur les profils d'énergie turbulente est donnée à partir de la modélisation de l'équation de ϵ . Plusieurs auteurs ont montré l'importance des effets de rotation de la particule fluide sur le champ turbulent et proposé une modélisation modifiée de l'équation de ϵ afin d'inclure

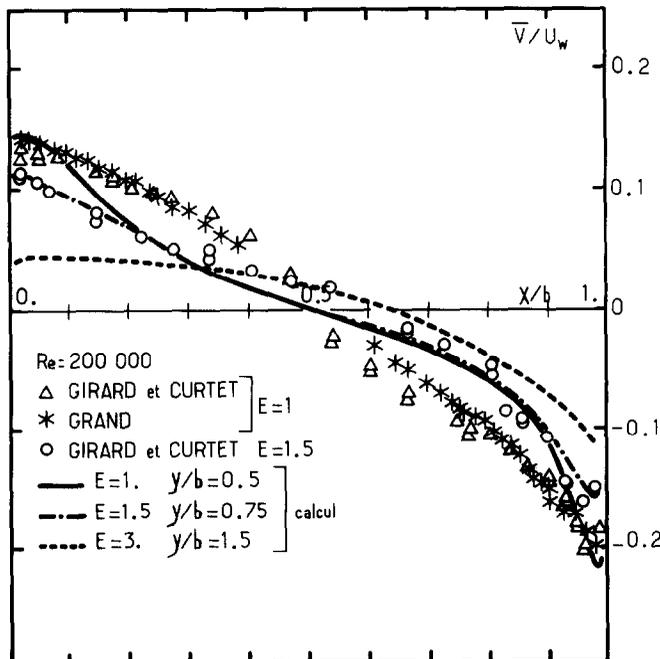


FIG. 5. Influence de l'élanement sur les profils de vitesse $V(x)$.

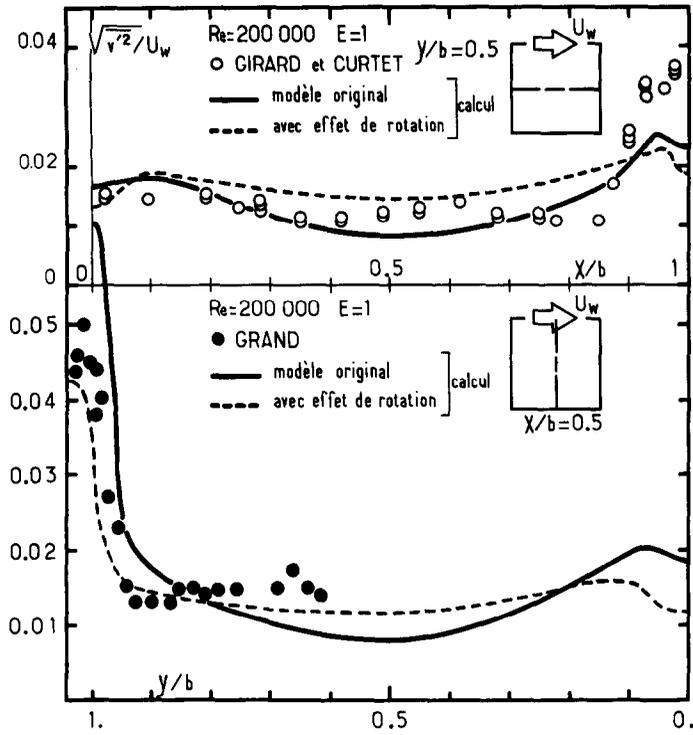


FIG. 6. Répartition des intensités de turbulence sur les sections médianes de la cavité.

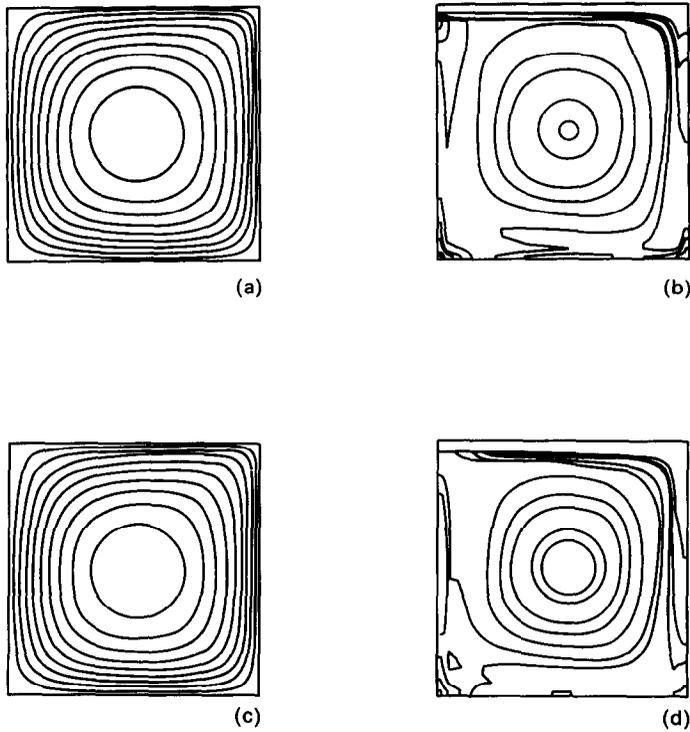


FIG. 7. Lignes de courant et courbes d'isoénergie turbulente dans une cavité carrée.

- (a) ψ/bU_w à $Re = 2 \times 10^5$;
- (b) k/U_w^2 à $Re = 2 \times 10^5$;
- (c) ψ/bU_w à $Re = 5 \times 10^4$;
- (d) k/U_w^2 à $Re = 5 \times 10^4$.

cet effet [42-44]. Le calcul a été repris avec une modification inspirée de celle proposée par Bardina *et al.* [43], les coefficients dans l'équation de ε étant remplacés par :

$$\begin{aligned} C_{\varepsilon 1} &= 1.45 + 0.06 d^* \\ C_{\varepsilon 2} &= 1.95 + 0.06 \omega^* \end{aligned} \quad (16)$$

avec

$$\omega^* = \frac{k}{\varepsilon} \left| \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right| \quad \text{et} \quad d^* = \frac{k}{\varepsilon} \left| \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right|$$

Le choix de $C_{\varepsilon 1}$ est tel que la modification n'a aucun effet dans le cas d'une zone logarithmique à flux constant dans laquelle $d^* = \omega^* = 1/0,30$.

Les résultats numériques obtenus en tenant compte de la modélisation (16) sont portés en pointillés sur la Fig. 6. On obtient ainsi, une augmentation du niveau d'énergie turbulente dans la région centrale et une diminution dans la zone de paroi, répartition qui semble plus conforme aux distributions expérimentales.

3.3. Champ thermique

Le problème de la convection thermique forcée dans une cavité à section carrée a été traité en couplant à l'équation de la chaleur, soit le modèle dynamique basé sur le schéma $k-\varepsilon$, soit le modèle basé sur un schéma algébrique aux tensions de Reynolds. Cependant, ces deux modèles ayant conduit dans le cas présent, à des résultats sensiblement identiques sur les propriétés de transfert thermique, nous présentons les résultats fournis par le modèle $k-\varepsilon$. Ce dernier modèle a, de plus, l'avantage de nécessiter des temps d'exécution sur ordinateur nettement inférieurs.

Les conditions aux limites imposées correspondent à des températures constantes sur chaque face. La paroi supérieure est portée à une température T_w tandis que

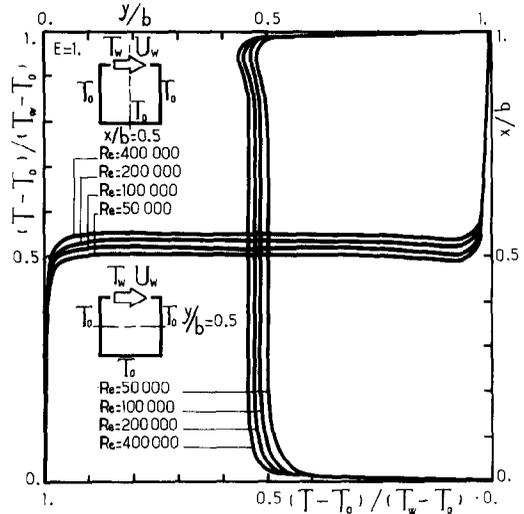


FIG. 8. Profils de température moyenne.

les trois parois fixes de la cavité sont à une température T_0 . Dans le cas considéré d'une convection forcée seule avec température de paroi constante, les résultats expérimentaux semblent pratiquement inexistant.

Les profils de température moyenne sont donnés sur la Fig. 8 pour diverses valeurs du nombre de Reynolds, le nombre de Prandtl étant maintenu constant égal à l'unité. On constate dans tous les cas que le niveau de température est constant sur la majeure partie de l'écoulement correspondant au noyau central, ce qui traduit l'efficacité du mélange turbulent.

On constate de plus que le niveau de température augmente avec le nombre de Reynolds. L'évolution de la température moyenne T_m du fluide dans le volume de la cavité est bien décrite, dans la plage de nombre de Reynolds considérés, par une corrélation empirique

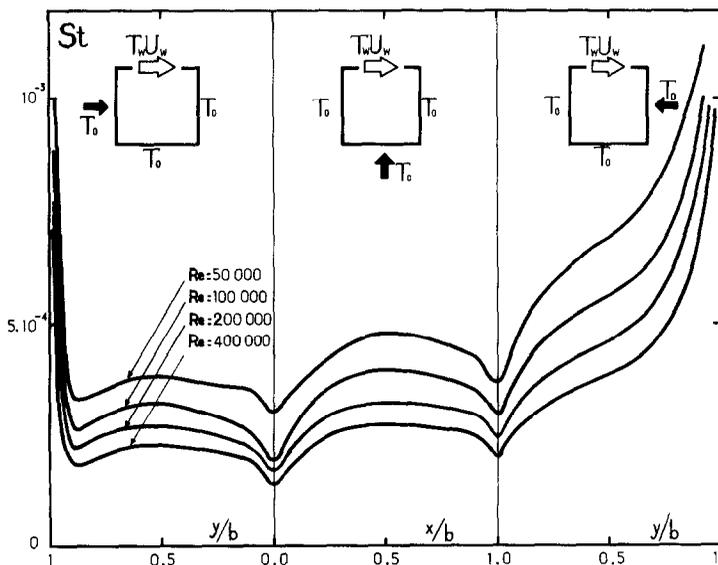


FIG. 9. Distribution des nombres de Stanton locaux sur les parois de la cavité.

déduite des résultats du calcul :

$$\frac{\theta_m}{\theta_w} = 0,62 - 1,8 Re^{-1/4} \tag{17}$$

L'explication de cet effet du nombre de Reynolds nécessite une analyse de la convection sur chaque face de la cavité.

Les distributions des nombres de Stanton locaux (Fig. 9) sur les trois faces de la cavité atteignent des niveaux relatifs comparables à ceux obtenus pour les coefficients de frottement (Fig. 4). Cependant l'allure des courbes de répartition est quelque peu différente, en particulier le flux thermique présente un maximum très accentué au voisinage des angles supérieurs de la cavité. De plus, l'influence du nombre de Reynolds est plus marquée sur le nombre de Stanton que sur le coefficient de frottement pariétal.

Les variations du nombre de Nusselt moyen sur chacune des faces de la cavité en fonction du nombre de Reynolds ont été corrélées par une formule empirique déduite des résultats du calcul qui résume les propriétés thermiques de la cavité en régime turbulent (pour le cas $E = 1$).

Les résultats numériques (Fig. 10) sont bien corrélés par une formule du type :

$$\overline{Nu}(j) = m_j Re^{3/4} \tag{18}$$

où l'indice j désigne la face considérée repérée sur la Fig. 1 et où m_j est un coefficient numérique. On trouve :

$$\begin{aligned} m_1 &= 0,0230 \\ m_2 &= 0,0058 \\ m_3 &= 0,0064 \\ m_4 &= 0,0108. \end{aligned} \tag{19}$$

Il est intéressant de remarquer combien chacune des faces convecte différemment. La face aval seule convecte presque autant que l'ensemble des deux autres faces de la cavité. On peut expliquer ce fait en remarquant que la turbulence engendrée par le fort cisaillement dû à la vitesse de la paroi mobile est convectée par le mouvement tourbillonnaire

d'ensemble, sur la face aval, ce qui produit un niveau élevé d'agitation turbulente dans cette zone (Fig. 7) et par conséquent une forte diffusivité thermique.

Le bilan thermique s'écrit :

$$\alpha_w(T_w - T_m) = 3\alpha_F(T_m - T_0)$$

où α_w est le coefficient de transfert de chaleur à la paroi mobile défini par :

$$\alpha_w = \frac{Q(1)}{b(\theta_w - \theta_m)} \tag{20}$$

et α_F le coefficient de transfert de chaleur pour l'ensemble des faces de la cavité fixe défini par :

$$\alpha_F = \frac{Q(2) + Q(3) + Q(4)}{3b\theta_m}$$

On déduit des relations précédentes :

$$\frac{\theta_m}{\theta_w} = \frac{1}{3(\alpha_F/\alpha_w) + 1} \tag{22}$$

On voit donc que l'augmentation de θ_m avec le nombre de Reynolds ($d\theta_m/dRe > 0$) est liée à l'augmentation du rapport des coefficients de transfert de chaleur [$d(\alpha_w/\alpha_F)/dRe > 0$]. Plus précisément, (17) montre que :

$$\frac{\alpha_w}{\alpha_F} = \frac{3(0,62 - 1,8 Re^{-1/4})}{0,38 + 1,8 Re^{-1/4}}$$

Lorsque le nombre de Reynolds augmente la région adjacente aux faces fixes de la cavité offre une résistance thermique relativement plus importante que celle existant à la face supérieure mobile, il en résulte une augmentation de la température moyenne au coeur de la cavité.

4. CONCLUSION

Deux types de modélisations (modèle $k-\epsilon$ et modèle algébrique aux tensions de Reynolds) ont été utilisées pour étudier la convection turbulente dans une cavité bidimensionnelle entraînée par une paroi mobile chauffée. Les calculs ont été effectués pour différentes valeurs du nombre de Reynolds et de l'élanement de la cavité. Les résultats dynamiques obtenus ont été comparés aux données expérimentales disponibles. Il ressort des confrontations calcul-expériences que le modèle $k-\epsilon$ permet une bonne prévision des principales caractéristiques moyennes de l'écoulement mais qu'il présente des insuffisances sur la description plus détaillée du champ turbulent. L'emploi du modelage algébrique des tensions de Reynolds permet une description plus détaillée du champ turbulent [38] mais les résultats sur le transfert thermique ne sont pas sensiblement modifiés. Si les seules relations (5) et (6) sont insuffisantes pour décrire dans ses détails un tel écoulement complexe, le modèle $k-\epsilon$ reste utile pour la précision des quantités globales qui interviennent dans la pratique industrielle.

Les propriétés de transfert thermique en régime de convection forcée avec températures de paroi imposées

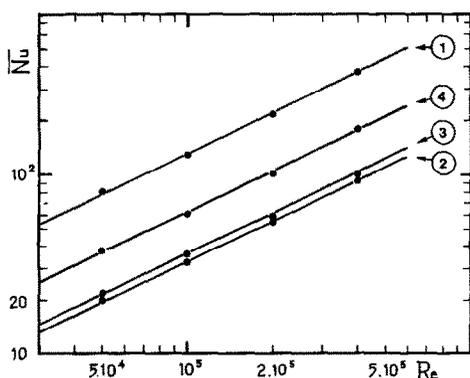


FIG. 10. Nombre de Nusselt global sur chaque face de la cavité en fonction du nombre de Reynolds.

sont résumées dans des formules de corrélation du type $\overline{Nu}(j) = m_j Re^{3/4}$ qui interpolent les valeurs calculées dans la plage $5 \times 10^4 \leq Re \leq 4 \times 10^5$. Les calculs ont aussi montré combien chaque face de la cavité convecte différemment, la face aval ayant un coefficient de transfert thermique beaucoup plus élevé.

L'effet du nombre de Reynolds a été plus particulièrement étudié. Sur la base des résultats obtenus il est envisagé d'introduire les effets couplés des forces de gravité et de la rotation en bloc qui interviennent dans le problème industriel du refroidissement des rotors de turbomachines qui est à l'origine du présent travail.

Remerciements—Ce travail a été réalisé à l'Institut de Mécanique Statistique de la Turbulence dans le cadre d'une convention de Recherche No. 83-401 passée par la Direction des Recherches Etudes et Techniques, Délégation Générale pour l'Armement (Ministère de la Défense, Paris) que les auteurs remercient pour leur support.

REFERENCES

1. P. Bradshaw, Effect of streamline curvature on turbulent flow, AGARD No. 169 (1973).
2. A. Roshko, Some measurements of flow in a rectangular cutout, NACA TN3488 (1955).
3. R. D. Mills, Flow in rectangular cavities. Ph.D. thesis, Univ. Londres (1961).
4. D. J. Maull et L. R. East, Three dimensional flow in cavities, *J. Fluid Mech.* **16**, 620-632 (1963).
5. R. D. Mills, On the closed motion of fluid in a square cavity, *J. R. aeronaut. Soc.* **69**, 116-120 (1965).
6. J. Fox, Surface pressure and turbulent air flow in transverse rectangular notches, NASA Technical Note D2501 (1964).
7. J. Fox, Heat transfer and air flow in a transverse rectangular notch, *Int. J. Heat Mass Transfer* **8**, 269-279 (1965).
8. J. Fox, Flow regimes in transverse rectangular cavities, *Proc. 1965 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute*, Stanford University Press, Stanford, CA, Chap. 14, pp. 230-247 (1965).
9. R. L. Haugen et A. M. Dhanak, Momentum transfer in a turbulent separated flow past a rectangular cavity, *Trans. Am. Soc. mech. Engrs, J. appl. Mech.* **23**, 641-646 (1966).
10. F. Pan et A. Acrivos, Steady flow in rectangular cavities, *J. Fluid Mech.* **28**, 643-655 (1967).
11. A. L. Kistler et F. C. Tan, Some properties of turbulent flows, *Phys. Fluids*, (Supplément) p. 165 (1967).
12. J. P. Girard et R. Curtet, Etude des courants de recirculation dans une cavité, Rapport C.E.A. GR 751-354 Institut de Mécanique, Domaine Universitaire, Grenoble (1975).
13. M. Normandin, Etude expérimentale de l'écoulement turbulent dans une cavité profonde. Thèse spécialité, INPG Grenoble, (1978).
14. D. Grand, Contribution à l'étude des courants de recirculation. Thèse Doct. Es. Sc. Phys. Univ. Scientifique et Médicale et Inst. Nat. Polytechnique, Grenoble (1975).
15. K. Weighardt, Erhöhung des turbulenten reibungswiderstandes durch oberflächenstörungen, *ForshHft. Schiffsteck* **2**, 65-81 (1953).
16. G. K. Batchelor, On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number, *J. Fluid Mech.* **1**, 177-190 (1956).
17. H. B. Squire, Note on the motion inside a region of recirculation (cavity flow), *J. R. aeronaut. Soc.* **60**, 203-205 (1956).
18. R. D. Mills, Numerical solutions of the viscous flows equations for a class of closed flows, *J. R. aeronaut. Soc.* **69**, 714-718 (1965).
19. O. R. Burggraf, Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows, *J. Fluid Mech.* **24**, 113-151 (1966).
20. D. Greenspan, Numerical studies of prototype cavity flows problems, *Comput. J.* **12**, 88-93 (1969).
21. E. Chin, L. D. Rafilnejad et R. A. Seban, Prediction of the flow and heat transfer in a rectangular cavity with turbulent flow, ASME paper No. 72-APM-Q (1973).
22. F. J. K. Ideriah, On turbulent forced convection in a square cavity, *Proc. First Int. Conf. on Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flows*, pp. 257-269. Pentech Press, (1978).
23. F. J. K. Ideriah, Turbulent natural and forced convection in plumes and cavities. Ph.D. thesis, Univ. Londres (1977).
24. P. Bontoux, B. E. Forestier et B. Roux, Analysis of higher order methods for the numerical simulation of confined flows. *Lecture Notes in Physics* No. 90, pp. 94-102. Springer-Verlag, Berlin (1980).
25. A. D. Gosman, W. M. Pun, A. K. Runchal, D. B. Spalding et M. Wolfshtein, *Heat and Mass Transfer in Recirculating Flows*. Academic Press, New York (1969).
26. F. J. K. Ideriah, Prediction of turbulent cavity flow driven by buoyancy and shear, *J. mech. Engng Sci.* **22**, 287-295 (1980).
27. M. Nallasamy et K. K. Prasad, On cavity flow at high Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.* **79**, 391-414 (1977).
28. P. Bontoux, Contribution à l'étude des écoulements visqueux en milieu confiné. Analyse et optimisation de méthodes numériques de haute précision. Thèse Doct. Es. Sc. Math. Univ. Aix-Marseille II, (1978).
29. M. Fortin, R. Peyret et R. Temam, Résolution numérique des équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible, *J. Mécanique* **10**, 357-390 (1971).
30. M. D. Olson et F. Y. Tuann, New finite element results for the square cavity, *Comput. Fluids* **7**, 123-195 (1979).
31. M. Kawaguti, Numerical solution of the Navier-Stokes equations for the flow in a two-dimensional cavity, *J. phys. Soc. Jap.* **16**, 2307-2315 (1961).
32. Y. Morchoisne, Résolution des équations de Navier-Stokes par une méthode pseudo-spectrale en espace temps, *La Recherche Aérop.* **5**, 293-306 (1979).
33. C. J. Chen, H. N. Neshat et K. S. Ho, Finite-analytic numerical solution of heat transfer in two-dimensional cavity flow, *Numer. Heat Transfer* **4**, 179-197 (1981).
34. W. P. Jones et B. E. Launder, The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence, *Int. J. Heat Mass Transfer* **15**, 301-313 (1972).
35. W. P. Jones et B. E. Launder, The calculation of low-Reynolds number phenomena with a two equation model of turbulence, *Int. J. Heat Mass Transfer* **16**, 1119-1129 (1973).
36. W. Rodi, The prediction of free turbulent boundary layers by use of two-equation model of turbulence. Ph.D. thesis, Univ. Londres (1972).
37. W. Rodi, A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses, *Z. angew. Math. Mech.* **56**, 219-221 (1976).
38. P. Abadie, Modélisation et prévision numérique de la convection laminaire et turbulente en milieu confiné: écoulement de recirculation dans une cavité entraînée. Thèse de spécialité, Univ. d'Aix-Marseille II (1984).
39. W. M. Pun et D. B. Spalding, A general computer program for two-dimensional elliptic flows, Imperial College, Londres, Mechanical Engineering Dept. Report. HTS/76/2 (1977).
40. A. D. Gosman et W. M. Pun, Calculation of recirculating flows, Imperial College, Londres, Mechanical Engineering Dept. Report (Décembre 1974).

41. S. V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere et McGraw-Hill, Washington, DC (1980).
42. K. Hanjalic et B. E. Launder, Sensitizing the dissipation equation to irrotational strain, *Trans. Am. Soc. mech. Engrs, J. Fluid Engng* **102**, 34-40 (1980).
43. J. Bardina, J. H. Ferziger et W. C. Reynolds, Improved turbulence models based on large eddy simulation of homogeneous, incompressible, turbulent flows, Technical Report No. TF. 19, Stanford Univ. (1983).
44. B. Aupoix et J. Cousteix, Effects of rotation on isotropic turbulence *Fourth Symp. on Turbulent Shear Flows*, Karlsruhe RFA (1983).

Ainsi :

$$S_k = \frac{\tau_p}{\rho} \frac{\partial U}{\partial y} - C_{\mu} \rho \frac{k^2}{\tau_p} \frac{LU}{\partial y}. \quad (\text{paroi horizontale})$$

Pour le taux de dissipation on utilise l'expression

$$S_\varepsilon = A\varepsilon_p - A\varepsilon$$

où A est un nombre très grand (10^{30}), ce qui permet d'imposer au point P proche de la paroi la valeur $\varepsilon_p = C_{\mu}^{3/4} k^{3/2} / \kappa \delta$.

Dans le cas d'une cellule placée dans un angle, l'hypothèse d'écoulement unidimensionnel n'est plus acceptable. Une première approximation a été obtenue en supposant que l'écoulement reste parallèle aux parois de part et d'autre de la bissectrice de l'angle. Ainsi

$$S_k = \frac{1}{2} \left(\frac{\tau_{px}}{\rho} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\tau_{py}}{\rho} \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} C_{\mu} \rho k^2 \left(\frac{1}{\tau_{px}} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{\tau_{py}} \frac{\partial V}{\partial x} \right)$$

où τ_{px} et τ_{py} désignent respectivement les tensions pariétales sur les parois horizontale et verticale issues de l'angle considéré.

ANNEXE

TRAITEMENT DES TERMES SOURCE POUR LES CELLULES DE PAROI

Du fait de la présence de forts gradients de vitesse près des parois on obtient une meilleure approximation si les termes sources dans l'équation d'énergie cinétique de la turbulence sont expérimentées directement en fonction de τ_p , tension de paroi.

NUMERICAL PREDICTION OF TURBULENT FORCED HEAT CONVECTION IN A BIDIMENSIONAL DRIVEN CAVITY FLOW

Abstract—Turbulent flow and associated heat transfer in confined geometry (driven closed cavity flow in two dimensions) has been studied using a finite-difference numerical method in primitive variables. Turbulence modelling is based on one point closures derived from the classical $k-\varepsilon$ model. Calculated mean velocity and turbulent kinetic energy are compared with available experimental data. In spite of its limitations, the $k-\varepsilon$ model proved to be a useful tool for prediction of global quantities. The case of forced heat convection with fixed wall temperature is considered. Mean temperature field and overall thermal properties of the cavity flow are studied. Correlations giving Nusselt numbers at each face of the cavity versus Reynolds number are deduced from numerical results, they sum up mean transfer properties of such a flow configuration.

NUMERISCHE BERECHNUNG DER WÄRMEÜBERTRAGUNG BEI ZWEIDIMENSIONALER TURBULENTER ERZWUNGENER KONVEKTION IN EINEM HOHLRAUM

Zusammenfassung—Mit Hilfe eines Finite-Differenzen-Verfahrens in den Grundvariablen wird die turbulente Strömung und der damit verbundene Wärmeübergang in abgeschlossenen Geometrien (erzwungene zweidimensionale Strömung in einem Hohlraum) untersucht. Die Turbulenzmodellierung beruht auf einer Ein-Punkt-Schließungsbedingung, abgeleitet aus dem klassischen $k-\varepsilon$ -Modell. Die berechnete mittlere Geschwindigkeit und die turbulente kinetische Energie werden mit experimentellen Daten verglichen. Trotz der Einschränkungen ist das $k-\varepsilon$ -Modell für die Berechnung globaler Größen nützlich. Es wird der Fall der erzwungenen Konvektion mit konstanter Wandtemperatur betrachtet. Untersucht werden das Temperaturfeld und die thermischen Eigenschaften der Hohlraumströmung. Aus den numerischen Ergebnissen werden Korrelationen für die Nusselt-Zahl an jeder Oberfläche des Hohlraums in Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl abgeleitet. Daraus ergeben sich mittlere Transporteigenschaften für solche Strömungskonfigurationen.

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЫНУЖДЕННОЙ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ ПРИ ДВУМЕРНОМ ТЕЧЕНИИ, ИНИЦИИРОВАННОМ В ПОЛОСТИ

Аннотация—Турбулентное течение и связанный с ним теплообмен в ограниченном объеме (двумерное течение, инициированное в замкнутой полости) изучается с использованием численного конечно-разностного метода в обычных переменных. Турбулентность моделируется классической $k-\varepsilon$ моделью. Рассчитанные средняя скорость и турбулентная кинетическая энергия сравниваются с имеющимися экспериментальными данными. Несмотря на естественные ограничения $k-\varepsilon$ модели, она оказалась удобным инструментом для расчета интегральных параметров. В работе рассматривается случай вынужденной тепловой конвекции с заданной температурой стенки. Изучаются среднее поле температуры и интегральные тепловые характеристики течения в полости. На основе численных результатов получены зависимости чисел Нуссельта от числа Рейнольдса для каждой стенки полости, которые обобщают свойства переноса для двумерного течения рассматриваемой конфигурации.